數學傳播 48卷3期, pp. 104-110

直三棱柱截面與底面夾角公式的相對性推廣

陳 都

摘要: 本文對世界數學名著《近代歐氏幾何學》中的一個重要定理進行了相對性推廣, 得到了一個簡明深刻的直三棱柱截面與底面夾角公式及其有趣推論。

關鍵詞: 直三棱柱、二面夾角公式、相對性推廣。

世界通俗數學名著 [1] 第 260 頁和文 [2] 給出了如下簡明優雅的

定理0: 底面三角形的 (特徵) Brocard 角爲 ω_0 的直三棱柱, 被某平面所截的截面爲正三角形, 該截面與三棱柱底面所成的角爲 ϕ_0, 則

$$\cos\phi_0=\frac{\sqrt{3}}{3}(\cot\omega_0-\sqrt{\cot^2\omega_0-3}).$$

稱上列公式爲特徵二面夾角公式。

三角形的 (特徵) Brocard 角 ω_0 是與三角形的兩個 (特徵) Brocard 點有關的一個特殊角。如圖 1, 在非等邊 $\triangle ABC$ 中, 存在兩點 D_0、D_0', 滿足 $\angle D_0AB=\angle D_0BC=\angle D_0CA=\angle D_0'BA=\angle D_0'AC=\angle D_0'CB$, 這一對特殊點 D_0、D_0' 稱爲 $\triangle ABC$ 的特徵正、負 Brocard 點, 這六個相等的角, 稱爲特徵 Brocard 角, 記爲 ω_0. 特徵 Brocard 點和特徵 Brocard 角具有許多奇異的性質, 如:

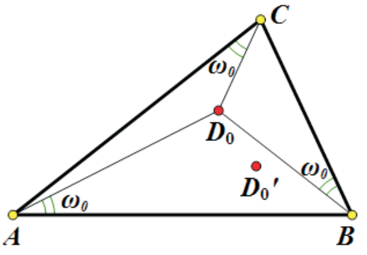

圖 1

(1) 設 $\triangle ABC$ 的三邊長分別爲 a、b、c, 面積爲 $\triangle$, 特徵 Brocard 角爲 ω_0, 則

$$\cot\omega_0=\frac{a^2+b^2+c^2}{4\triangle}.$$

(2) 設 $\triangle ABC$ 的三內角分別爲 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$, 特徵 Brocard 角爲 ω_0, 則

$$\cot\omega_0=\cot A+\cot B+\cot C;$$
$$1/\sin^2\omega_0=1/\sin^2 A+1/\sin^2 B+1/\sin^2 C.$$

(3) $\triangle ABC$ 的特徵 Brocard 角 $\omega_0 \in (0, \pi/6]$, 當且僅當 $\triangle ABC$ 爲正三角形時, $\omega_0 = \pi/6$.

(4) 特徵正、負 Brocard 點 D_0、D_0' 是 $\triangle ABC$ 的一對等角共軛點。

(5) 設 $\triangle ABC$ 的邊長分別爲 a、b、c, 特徵 Brocard 角爲 ω_0, 則特徵正、負 Brocard 點 D_0、D_0' 到 $\triangle ABC$ 的頂點 A、B、C 之距依次爲

$$D_0A = \frac{b}{a}\cdot 2R\sin\omega_0, \quad D_0B = \frac{c}{b}\cdot 2R\sin\omega_0, \quad D_0C = \frac{a}{c}\cdot 2R\sin\omega_0;$$
$$D_0'A = \frac{c}{a}\cdot 2R\sin\omega_0, \quad D_0'B = \frac{a}{b}\cdot 2R\sin\omega_0, \quad D_0'C = \frac{b}{c}\cdot 2R\sin\omega_0.$$

(6) 設 $\triangle ABC$ 的外接圓爲 $\odot O(R)$, 特徵正、負 Brocard 點爲 D_0、D_0', 特徵 Brocard 角爲 ω_0, 則

$$OD_0 = OD_0' = R\sqrt{1-4\sin^2\omega_0}\ ,$$
$$D_0D_0' = 2R\sin\omega_0\sqrt{1-4\sin^2\omega_0}\ .$$

特徵 Brocard 點和特徵 Brocard 角的其他性質詳見名著 [1] 第 232-245 頁, 這裡不贅。

現在, 我們給出三角形的特徵正、負等角線長的概念:

如圖 2, 以 $\triangle ABC$ 的三邊爲邊, 向外作正三角形 A_0CB、B_0AC、C_0BA, 則線段 $AA_0 = BB_0 = CC_0$, 其長度記爲 e_0, 稱 e_0 爲 $\triangle ABC$ 的特徵正等角線長; 如圖 3, 以 $\triangle ABC$ 的三邊爲邊, 向內作正三角形 A_1BC、B_1CA、C_1AB, 則線段 $AA_1 = BB_1 = CC_1$, 其長度記爲 f_0, 稱 f_0 爲 $\triangle ABC$ 的特徵負等角線長。

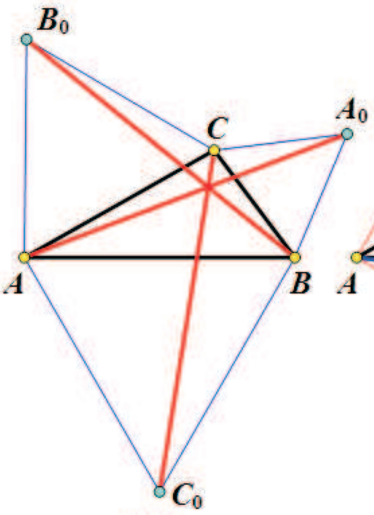

圖 2

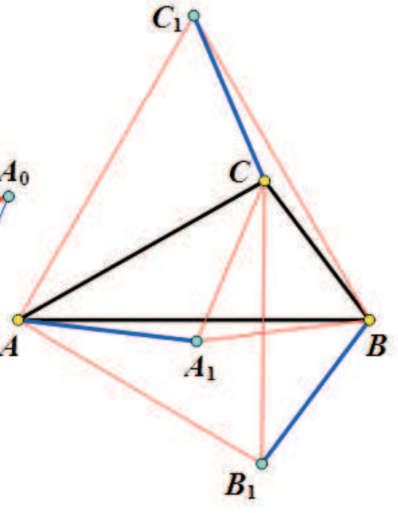

圖3

由文獻 [3], 可得如下

結論: 設 $\triangle ABC$ 的三邊長、面積分別爲 a、b、c、$\triangle$, 它的特徵正、負等角線長爲 e_0、f_0, 特徵 Brocard 角爲 ω_0, 則有

$$e_0 = \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}\triangle), \qquad f_0^2 = \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}\triangle),$$
$$\cot\omega_0 = \sqrt{3}\cdot\frac{e_0^2+f_0^2}{e_0^2-f_0^2}.$$

下面, 我們從全新的視角, 將上述定理0進行相對性推廣, 證明了一個簡潔優美的相對二面夾角公式, 並以定理 0 中的特徵二面夾角公式作爲它的特例。需要如下:

引理1: 設角 α 的兩邊與某平面所成的角分別爲 β、γ, 它在該平面上的射影角爲 α', 則

$$\cos\alpha' = \frac{\cos\alpha-\sin\beta\sin\gamma}{\cos\beta\cos\gamma}. \tag{$*$}$$

上式是三面角的二面角餘弦公式 (文 [4]) 的變式, 證明從略。

現在, 我們給出三個新幾何量(相對正、負等角線長和相對 Brocard 角) 的定義:

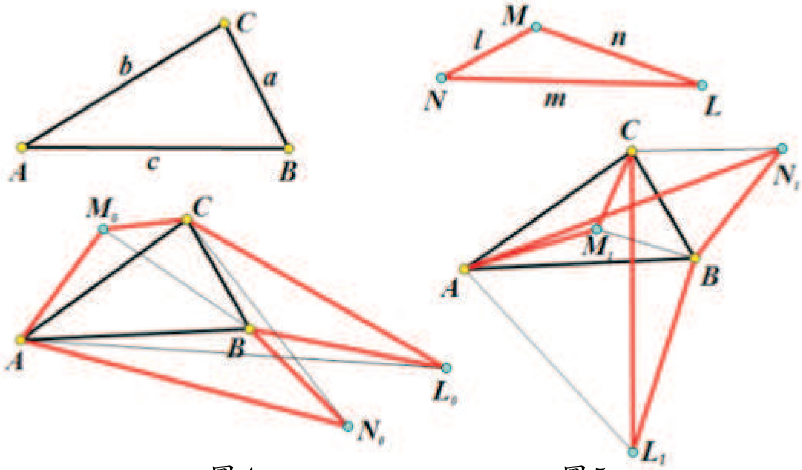

圖4　　圖5

如圖 4、5, 已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle LMN$, 在 $\triangle ABC$ 的外側, 分別作三角形 L_0CB、M_0AC、N_0BA, 使 $\triangle L_0BC$、$\triangle AM_0C$、$\triangle ABN_0$ 逆相似 $\triangle LMN$; 對偶地, 在 $\triangle ABC$ 的內側, 分別作三角形 L_1BC、M_1CA、N_1AB, 使 $\triangle L_1BC$、$\triangle AM_1C$、$\triangle ABN_1$ 順相似 $\triangle LMN$. 文 [5] 證明了如下

引理2: 設 $\triangle ABC$, $\triangle LMN$ 的三邊長、面積分別爲 a、b、c、$\triangle$, l、m、n、$\bigtriangledown$, 記

$$\begin{aligned}h^4 =&a^2(-l^2+m^2+n^2)+b^2(l^2-m^2+n^2)+c^2(l^2+m^2-n^2)\\ =&l^2(-a^2+b^2+c^2)+m^2(a^2-b^2+c^2)+n^2(a^2+b^2-c^2)\\ =&(a^2+b^2+c^2)(l^2+m^2+n^2)-2(a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2),\end{aligned}$$

$e^4=(h^4+16\triangle\bigtriangledown)/2>0, \quad f^4=(h^4-16\triangle\bigtriangledown)/2\geq 0$, 則

$l\cdot AL_0=m\cdot BM_0=n\cdot CN_0=e^2$;

$l\cdot AL_1=m\cdot BM_1=n\cdot CN_1=f^2$.

稱 e 是 $\triangle ABC$ 相對 $\triangle LMN$ 的正等角線長 (或稱 $\triangle ABC$ 與 $\triangle LMN$ 的相對正等角線長); 稱 f 是 $\triangle ABC$ 相對 $\triangle LMN$ 的負等角線長 (或稱 $\triangle ABC$ 與 $\triangle LMN$ 的相對負等角線長)。

據此, 可以給出相對 Brocard 角 ω 的定義:

設 $\triangle ABC$ 相對 $\triangle LMN$ 的正、負等角線長分別爲 e、f, 令 $\cot\omega=\sqrt{3}\cdot\dfrac{e^4+f^4}{e^4-f^4}$, 則稱 ω 是 $\triangle ABC$ 相對 $\triangle LMN$ 的 Brocard 角 (或稱 $\triangle ABC$ 與 $\triangle LMN$ 的相對 Brocard 角) 。

上述關於相對 Brocard 角的定義是合理而自洽的, 因爲該定義不僅與相對正、負等角線長 e、f 的定義協調, 而且當 $\triangle LMN$ 爲正三角形時, 相對 Brocard 角公式就退化爲特徵 Brocard 角公式。具體說, 若 $l=m=n$, 則 $\triangle LMN$ 的面積 $\bigtriangledown=\sqrt{3}l^2/4$, 有 $16\triangle\bigtriangledown=4\sqrt{3}\triangle l^2$, $h^4=(a^2+b^2+c^2)l^2$, 從而

$$\begin{aligned}e^4=&\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}\triangle)l^2=e_0^2l^2,\\ f^4=&\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}\triangle)l^2=f_0^2l^2,\end{aligned}$$

將以上二式代入相對 Brocard 角公式:

$$\cot\omega=\sqrt{3}\cdot\frac{e^4+f^4}{e^4-f^4},$$

就可得到特徵 Brocard 角公式

$$\cot\omega_0=\sqrt{3}\cdot\frac{e_0^2+f_0^2}{e_0^2-f_0^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{4\triangle}.$$

現在, 我們對直三棱柱截面與底面的 (特徵) 夾角公式進行相對性推廣:

定理: 設 $\triangle ABC$ 與 $\triangle LMN$ 的相對正、負等角線長分別爲 e、f, 相對 Brocard 角爲 ω, 以 $\triangle ABC$ 爲底面的直三棱柱, 被某平面所截的截面 $\triangle L_1M_1N_1\sim\triangle LMN$, 該截面與三棱柱底面所成的角爲 ϕ, 則

$$\cos\phi=\frac{e^2-f^2}{e^2+f^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}(\cot\omega-\sqrt{\cot^2\omega-3}).$$

證明: 如圖 6, 設截面 $\triangle L_1M_1N_1\sim\triangle LMN$, 相似比爲 k, 則 $L_1M_1=k\cdot LM=kn$, $L_1N_1=k\cdot LN=km$, 不妨使頂點 L_1 與 A 重合, 在公式 $(*)$ 中, 令 $\alpha=\angle N_1AM_1=\angle L$, $\alpha'=\angle CAB=\angle A$, $\beta=\angle M_1AB$, $\gamma=\angle N_1AC$, 則 $\cos\beta=AB/AM_1=c/kn$, $\cos\gamma=AC/AN_1=b/km$,

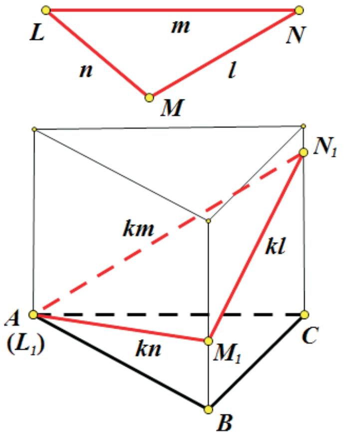

圖 6

$$\sin\beta=\sqrt{1-\frac{c^2}{k^2n^2}},\quad \sin\gamma=\sqrt{1-\frac{b^2}{k^2m^2}},$$

代入公式 $(*)$, 得

$$\begin{aligned}\frac{bc}{k^2mn}\cos A&=\cos L-\sqrt{\Big(1-\frac{c^2}{k^2n^2}\Big)\Big(1-\frac{b^2}{k^2m^2}\Big)}\\&=\cos L-\frac{\sqrt{(k^2m^2-b^2)(k^2n^2-c^2)}}{k^2mn},\end{aligned}$$

即 $bc\cos A=k^2mn\cos L-\sqrt{(k^2m^2-b^2)(k^2n^2-c^2)}$,

移項, 兩邊平方, 得

$$(k^2mn\cos L-bc\cos A)^2=(k^2m^2-b^2)(k^2n^2-c^2),$$

展開, 並整理, 得

$$m^2n^2(1-\cos^2L)k^4-(b^2n^2+c^2m^2-2bcmn\cos A\cos L)k^2+b^2c^2(1-\cos^2A)=0.$$

上式中, $m^2n^2(1-\cos^2L)=m^2n^2\sin^2L=4\bigtriangledown^2$, $b^2c^2(1-\cos^2A)=b^2c^2\sin^2A=4\triangle^2$,

$$\begin{aligned}&b^2n^2+c^2m^2-2bcmn\cos A\cos L\\&=\frac{1}{2}(2b^2n^2+2c^2m^2-2bc\cos A\cdot 2mn\cos L)\\&=\frac{1}{2}[2b^2n^2+2c^2m^2-(-a^2+b^2+c^2)(-l^2+m^2+n^2)]\\&=\frac{1}{2}[a^2(-l^2+m^2+n^2)+b^2(l^2-m^2+n^2)+c^2(l^2+m^2-n^2)]\\&=\frac{1}{2}h^4,\end{aligned}$$

於是, $4\bigtriangledown^2k^4-\frac{1}{2}h^4k^2+4\triangle^2=0$.

這是一個關於 k^2 的一元二次方程, 其判別式

$$\begin{aligned}\delta =&\Big(-\frac{1}{2}h^4\Big)^2-4\cdot 4\triangle^2\cdot 4\triangledown^2=\frac{1}{4}(h^8-16^2\triangle^2\triangledown^2)\\ =&\frac{1}{2}(h^4+16\triangle\triangledown)\cdot\frac{1}{2}(h^4-16\triangle\triangledown)=e^4f^4,\\ \therefore\ k^2 =&\Big(\frac{1}{2}h^4\pm e^2f^2\Big)/8\triangledown^2=(h^4\pm 2e^2f^2)/16\triangledown^2\\ =&(e^4+f^4\pm 2e^2f^2)/16\triangledown^2=(e^2\pm f^2)^2/16\triangledown^2,\end{aligned}$$

設 $\triangle L_1M_1N_1$ 的面積爲 $\triangledown_1$, 則 $\triangledown_1=k^2\triangledown$, 由射影面積公式, 得

$$\begin{aligned}\cos\phi =&\triangle/\triangledown_1=\triangle/k^2\triangledown=\frac{\triangle}{\triangledown}\div\frac{(e^2\pm f^2)^2}{16\triangledown^2}\\ =&\frac{16\triangle\triangledown}{(e^2\pm f^2)^2}=\frac{e^4-f^4}{(e^2\pm f^2)^2}\\ =&\frac{e^2-f^2}{e^2+f^2}\quad\Big(\text{捨去 }\frac{e^2+f^2}{e^2-f^2}\Big);\\ \text{又}\quad \cot\omega =&\sqrt{3}\cdot\frac{e^4+f^4}{e^4-f^4},\\ \text{解得}\quad \frac{f^2}{e^2} =&\sqrt{\frac{\cot\omega-\sqrt{3}}{\cot\omega+\sqrt{3}}},\\ \therefore\quad \cos\phi =&\frac{e^2-f^2}{e^2+f^2}=\Big(1-\frac{f^2}{e^2}\Big)\div\Big(1+\frac{f^2}{e^2}\Big)\\ =&\left(1-\sqrt{\frac{\cot\omega-\sqrt{3}}{\cot\omega+\sqrt{3}}}\right)\div\left(1+\sqrt{\frac{\cot\omega-\sqrt{3}}{\cot\omega+\sqrt{3}}}\right)\\ =&\left(1-\sqrt{\frac{\cot\omega-\sqrt{3}}{\cot\omega+\sqrt{3}}}\right)^2\div\left(1-\frac{\cot\omega-\sqrt{3}}{\cot\omega+\sqrt{3}}\right)\\ =&2\cdot\frac{\cot\omega-\sqrt{\cot^2\omega-3}}{\cot\omega+\sqrt{3}}\div\frac{2\sqrt{3}}{\cot\omega+\sqrt{3}}\\ =&\frac{\sqrt{3}}{3}(\cot\omega-\sqrt{\cot^2\omega-3}).\end{aligned}$$

綜上, $\cos\phi=\dfrac{e^2-f^2}{e^2+f^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(\cot\omega-\sqrt{\cot^2\omega-3})$. 證畢。

推論 1: $\sin\phi=\dfrac{2ef}{e^2+f^2}$.

推論 2: $\tan\dfrac{\phi}{2}=\dfrac{f}{e}$.

推論3: 設 $\triangle ABC$ 的三邊長、面積分別爲 a、b、c、$\triangle$, 它的特徵正、負等角線長爲 e_0、f_0, 特徵 Brocard 角爲 ω_0, 若 $\triangle LMN$ 爲正三角形, 以 $\triangle ABC$ 爲底的三棱柱的正三角形截面與底面所成角爲 ϕ_0, 則

$$\cos\phi_0=\frac{e_0-f_0}{e_0+f_0}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Big(\cot\omega_0-\sqrt{\cot^2\omega_0-3}\Big).$$

證明: 因爲 $\triangle LMN$ 爲正三角形, 記其邊長爲 l, 有面積 $\triangledown=\sqrt{3}l^2/4$, 從而 $16\triangle\triangledown=4\sqrt{3}\triangle l^2$, $h^4=(a^2+b^2+c^2)l^2$, 則

$$\begin{aligned}e^4=&\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}\triangle)l^2=e_0^2l^2,\\ f^4=&\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}\triangle)l^2=f_0^2l^2,\\ \therefore\quad \cos\phi_0=&\frac{e^2-f^2}{e^2+f^2}=\frac{e_0-f_0}{e_0+f_0}.\end{aligned}$$

又由名著 [1] 第 235 頁的公式, 知 $a^2+b^2+c^2=4\triangle\cot\omega_0$, 從而

$$e^4=2l^2\triangle(\cot\omega_0+\sqrt{3}),\quad f^4=2l^2\triangle(\cot\omega_0-\sqrt{3}),$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \cos\phi_0=\frac{e^2-f^2}{e^2+f^2}=&\frac{\sqrt{\cot\omega_0+\sqrt{3}}-\sqrt{\cot\omega_0-\sqrt{3}}}{\sqrt{\cot\omega_0+\sqrt{3}}+\sqrt{\cot\omega_0-\sqrt{3}}}\\ =&\frac{(\sqrt{\cot\omega_0+\sqrt{3}}-\sqrt{\cot\omega_0-\sqrt{3}})^2}{(\cot\omega_0+\sqrt{3})-(\cot\omega_0-\sqrt{3})}\\ =&\frac{2(\cot\omega_0-\sqrt{\cot^2\omega_0-3})}{2\sqrt{3}}\\ =&\frac{\sqrt{3}}{3}(\cot\omega_0-\sqrt{\cot^2\omega_0-3}).\end{aligned}$$

綜上, 推論 3 獲證。

顯然, 推論 3 中的後一式, 即爲文首定理 0 中的公式。

參考資料

1. R. A. 約翰遜(美) 編著, 單墫譯。近代歐氏幾何學 [M]。上海教育出版社, 1999。
2. 林璧羨。三角形的 Brocard 角 [J]。數學通訊, 1987, 8。
3. 陳都。內外 Fermat 點之間的距離 [J]。湖南數學通訊, 1998, 3。
4. 葉軍。數學奧林匹克教程[M]。湖南師範大學出版社, 2003, 6。
5. 陳都。涉及兩個三角形的 Fermat 問題 [J]。湖南數學通訊, 1998, 4。
6. 陳都。兩三角形的相對內外 Fermat 點之間的距離 [J]。中學數學, 2000, 8。

—本文作者任教中國湖南省祁東縣文武學校普高部—